2Préparation de GdT

mardi 5 décembre 2023 09:37

§1 la filtration conjugate

On rappelle que , $k/\mathbb{F}_p$

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_a^{\#} \longrightarrow W \longrightarrow F_*W \longrightarrow 0$$

① une suite exacte des groupes plats

$$\mathbb{G}_a^{dR} := \mathrm{cone} \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_a^{\#} & \longleftarrow & \mathbb{G}_a^{\#} \oplus F_*W & \longrightarrow & F_*W \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{can}, V)} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{G}_a & \longleftarrow & W & \xrightarrow{F} & F_*W \end{array}$$

② un zigzag de quasi-iso des champs en anneaux dérivées en particulier,

③ $R\Gamma((X/k)^{dR}, \mathcal{O}) \simeq R\Gamma(X, DR(X/k))$ Pour X lisse

Alors on s'intéresse à la structure locale de X^{dR}

Prop. X-lisse

X^{dR} est un s'identifie à $BV(T_{X^{(1)}/k})^{\#}$-torsor sur $X^{(1)}$.

Pf. $\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a^{dR} \to \tau_{\le 0}\mathbb{G}_a^{dR} = F_*\mathbb{G}_a$

Il existe localement un diagramme Cartésien comme dessous.

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X^{dR} & \xrightarrow{v} & X^{(1)} \\ \exists\text{unique}\downarrow \text{ étale } (f_1,\dots,f_n) & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^n & \longrightarrow & (\mathbb{G}_a^{dR})^n & \longrightarrow & (\mathbb{A}^n)^{(1)} \end{array}$$

$G := (\mathbb{G}_a^{dR})^n$

l'action de G est équivalente à la dérivée $(\frac{d}{dt_i})$

$$* \longrightarrow BG$$

on peut voir

$\Rightarrow (BF_*\mathbb{G}_a^{\#})^n \to (\mathbb{G}_a^{dR})^n \longrightarrow (\mathbb{A}^n)^{(1)}$ $\square$

Cor $v : (X/k)^{dR} \longrightarrow X^{(1)}$

par la calculation de torseur.

① $\bigoplus_i R^i v_* \mathcal{O}_{X/k, dR} \overset{!}{\simeq} \Lambda^{\bullet}\Omega_{X^{(1)}/k}$ (iso de Cartier)

② $Rv_* \mathcal{O}_{X/k, dR} \simeq F_{X/k*} DR(X/k)$ dans $\mathcal{D}_{qc}(X^{(1)})$

filtration de Leray fil de Conjugate

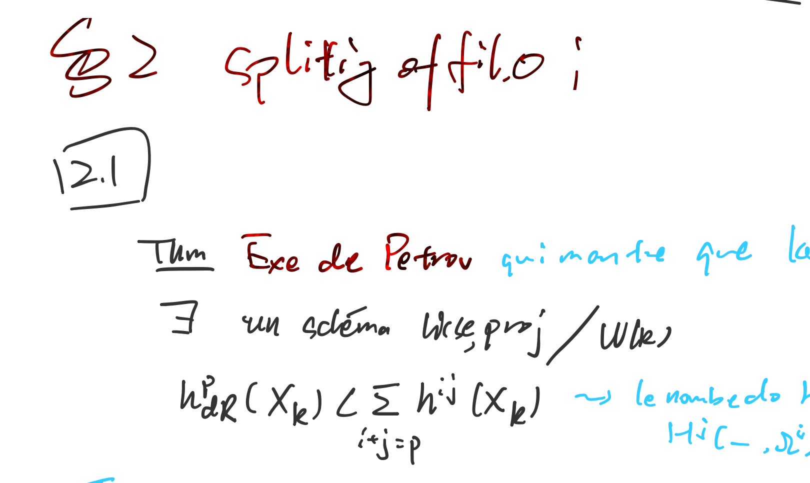
③ $R\Gamma(X^{dR}, \mathcal{O}) \simeq R\Gamma(X, DR(X/k))$

(Explication : Leray fil : donne une suite spectrale dont la seconde

$R\Gamma^i(X^{(1)}, Rv_*^j M) \Rightarrow R\Gamma^{i+j}(X^{dR}, M)$ pour $M \in \mathcal{D}^{b}(X^{dR})$

quant à la fil conjuguée :

$R^{\bullet} \in \mathrm{Alg}_k^{lis}$, $R = |R^{\bullet}|$



---

§2 splitting of fil ;

2.1

Thm Exe de Petrov qui montre que la fil conj n'est pas vérifie dégénéré

$\exists$ un schéma lisse, proj $/W(k)$

$h^p_{dR}(X_k) < \sum_{i+j=p} h^{ij}(X_k)$ ⇝ le nombre de Hodge $H^j(-, \Omega^i)$

Esquisse : $G/W(k)$ finie plat dont la fil conj sur BG ne dégénère pas,

$$H^0(BG_k, \Omega^p_{BG_k/k}) \xrightarrow{\neq 0} H^{p+1}(BG_k, \mathcal{O})$$

Par un variant de Godeaux–Serre–Raynaud,

$X \xrightarrow{f} BG$ qui est assez proche au niveau de H^{p+1}.

2.2 Scindement jusqu'une torsion de Frob

$$\simeq BV(F^*_{X/k} T_{X/k})^{\#} \simeq BV(F_X^* T_{X/k})^{\#}$$

$$\begin{array}{ccccc} F^*X^{dR} & \longrightarrow & X^{dR} & & \\ \downarrow & \circlearrowleft \text{diag} & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow[X^{dR}]{F} & X^{(1)} & \longrightarrow & X \end{array}$$

par le diagonal

$\Rightarrow F^*_{X/k} F_{X/k,*} DR(X/k) \simeq F^*_{X/k}(\bigoplus \Omega^i_{X^{(1)}/k}[-i])$

Cor Si : $\mathcal{O}_{X^{(1)}} \longrightarrow Rv_* \mathcal{O}_{X^{dR}}$

scinde dans $\mathcal{D}_{qc}(X^{(1)})$, la filtration conjugate dégénère.

---

§2.3 Transmutation

$$\tau_{\ge 1}\mathbb{G}_a^{dR} \longrightarrow \mathbb{G}_a^{dR} \longrightarrow \tau_{\le 0}\mathbb{G}_a^{dR}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} F_*\mathbb{G}_a^{\#} & \longrightarrow & F_*W & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times p} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_*W & \longrightarrow & F_*\mathbb{G}_a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{u} & \mathbb{G}_a^{\#} \\ {\scriptstyle \times p}\downarrow & & \downarrow \\ W & \longleftarrow & 0 \end{array} \quad \overset{\mathrm{Gr}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{array}{cc} F_*W & \mathbb{G}_a^{\#} \\ \uparrow & \downarrow \\ W & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{G}_a^{\#} & \longrightarrow & W & \xrightarrow{F} & F_*W & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u^{\#}} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & V(\mathcal{O}(1))^{\#} & \longrightarrow & M_u & \longrightarrow & F_*W & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle d_u} & & \downarrow{\scriptstyle \times p} & & \\ 0 & \to & \mathbb{G}_a^{\#} & \longrightarrow & W & \longrightarrow & F_*W & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

vers la base

$$\mathbb{G}_a^{dR,c,W} := F_*\mathrm{cone}(M_u \xrightarrow{d_u} W)$$

- $\mathbb{G}_a^{dR,c,W}|_1 = \mathbb{G}_a^{dR}$
- $\pi_0(\mathbb{G}_a^{dR,c,W}) = F_*\mathbb{G}_a$

  $\pi_1(\mathbb{G}_a^{dR,c,W}) = F_*(\mathcal{O}(1))^{\#}$ Dirac

$\Rightarrow$ Gr $\mathbb{G}_a^{dR,c,W} = F_*\mathbb{G}_a \oplus BF_*\mathbb{G}_a^{\#}$

Pour $X \in \mathrm{Sch}_k$,

$$X^{dR,c,W}(\mathrm{Spec}R \to [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]) = \mathrm{Map}_{\mathrm{dSt}_k}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{G}_a^{dR,c,W}(R), X)$$

Attention : Ici on ne suppose pas que X admis un relèvement à W_k

Thm $\pi_X : (X/k)^{dR,c,W} \longrightarrow [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$

$\mathcal{H}_{dR,c,W}(X) := R\pi_{X,*}\mathcal{O}$ est q.c. et complète,

s'identifie avec $\mathrm{Fil}^{conj}_* R\Gamma(X, DR(X/k))$

Pf. $\mathcal{H}_{dR,c,W}(X)|_1 = \mathcal{H}_{dR}(X)$

$\tilde{v} : (X/k)^{dR,c,W} \longrightarrow X^{(1)} \times [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$

est un $BV(T_{X^{(1)}/k}(1))^{\#}$ torseur, alors

$$\mathcal{H}^n(R\tilde{v}\,\mathcal{O}_{X/k, dR, c}) \simeq \Lambda^n\Omega_{X^{(1)}/k}(n) \simeq \mathrm{gr}_n(\mathcal{H}^n Rv_*\mathcal{O}_{(X/k)^{dR}})$$

i.e. filtration de Leray $\square$

divers

$$W^{\times}[F] \longrightarrow W^{\times} \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

$$\nexists! \qquad \uparrow$$

$$\mathbb{G}_m^{\#}$$

racine de l'unité

$$\begin{array}{ccc} \mu_p & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^{\#} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}_m & \underset{\text{scinde}}{\overset{[\_]}{\longrightarrow}} & W^{\times} \\ {\scriptstyle (\ )^p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathbb{G}_m & \longrightarrow & W^{\times} \end{array}$$

W/p^2W : trivially $\circlearrowleft$ $(W \cdot e_{p^2} \xrightarrow{\times p^2} W)$

$(\times p, \mathrm{id})$ Can

$$\mu_p \hookrightarrow W^{\times}[F] \circlearrowright (M_u \xrightarrow{d_u} W) \xrightarrow{\times\varepsilon} (M_u \xrightarrow{d_u} W)$$

enlarged pW

$VF = p$

$p\varepsilon = V(1)\varepsilon = V(F\varepsilon) = V(1) = p$,

Illusie

Cor Soit k un corps parfait, X/k lisse

$\tilde{X}/W_2(k)$ relèvement plat,

Alors, $\exists\ \mu_p \circlearrowright F_{X/k,*}DR(X/k)$ qui

pose $\Omega^i_{X^{(1)}/k} \simeq \mathcal{H}^i(F_{X/k,*}DR(X/k))$ à poids $(-i)$.

En particulier, pour tout entiers

$a \le b \le a+p-1$. $\tau^{[a,b]} F_{X/k,*}DR(X/k)$ scinde.

Pf. $v : (X/k)^{dR,c,W} \longrightarrow X^{(1)} \times \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$

$$(X^{dR,c,W})(\mathrm{Spec}(R) \to [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]) \simeq \mathrm{Map}_{W_2}(\mathrm{Spec}(\mathbb{G}_a^{dR,c,W}(R)), \tilde{X})$$

$\circlearrowright \mu_p$

— $\mathcal{H}^i(Rv_*\mathcal{O}_{(X/k)^{dR,c,W}})$ est pure (pour le puissance

— $\mu_p \circlearrowright \mathbb{G}_a^{dR,c,W}|_{B\mathbb{G}_m} \simeq F_*\mathbb{G}_a \oplus F_*(\mathcal{O}(1))^{\#}[1]$

$\square$